数理解析研究所講究録
第80巻 1970年 1-13

特性汎函数方程式の解法
Tatarskiの仕事を中心に

京大　数研　　川　原　琢　治

§1.　序

特性汎函数方程式（Hopf 方程式）が乱れの場の統計的に完全な記述を与えることは良く知られている。この方程式が解けて，初期条件を含む形の解が得られたとすると，一様な乱れの問題は解決したと言える。しかし，この汎函数微積分方程式を厳密に解くことは，汎函数空間での積分の一般論がまだ確立されていない（汎函数方程式の解の存在及び一意性の問題さえも十分研究されているとは言えない）という事情などのため非常に困難である。しかしながら，通常の微分方程式を解く場合と同様な近似解法，または，量子場理論の方程式と特性汎函数方程式とのアナロジーを利用して，量子場理論の分野で開発されている手法を用いる解法などが考えられてきた。

この稿では，特性汎函数方程式の種々の近似解法を列挙し，最後に，量子場理論に於ける摂動のテクニックを応用して特性汎函数方程式のReynolds 数によらない形式解を得たTatarski の仕事[1)]を紹介する。

§2.　特性汎函数方程式

非圧縮粘性流体に於ける乱れを，Navier−Stokes 方程式及び連続の方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} + \nu\triangle\mathbf{u} \quad ,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad , \tag{A}$$

に従う速度場$\mathbf{u}(\mathbf{x})$の偶然運動と定義したとき，この乱れの場の統計的に完全な記述は，その場$\mathbf{u}(\mathbf{x})$の分布函数に対する知識によって与えられる。$\mathbf{u}(\mathbf{x})$の分布函数を$P[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$としたとき，$P[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$の時間的変化を支配する方程式を$u$に対する運動方程式（A）と確率保存則とを用いて導いたものが，分布汎函数方程式と呼ばれているものである。あるいは分布函数$P[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$の

Fourier 変換である特性汎函数Φ〔$\mathbf{y}(\mathbf{x})$〕に対する同様な方程式は特性汎函数方程式と呼ばれる。

物理空間での方程式(A)の代りにFourier 変換されたNavier−Stokes 方程式について考える方が便利なことが多い。

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$のFourier 変換を$\mathbf{v}(\mathbf{k}, t)$とすると

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{v}(\mathbf{k}, t)\, exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\, d\mathbf{k}\,.$$

このとき(A)式のFourier 変換は，圧力項を消去して，

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{k}, t) = -\nu k^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}) - i\int \mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\left\{\mathbf{v}(\mathbf{k}') - \frac{\mathbf{k}}{k^2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k}'))\right\} d\mathbf{k}'\,,$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k}) = 0\,, \tag{B}$$

となる。

$\mathbf{v}(\mathbf{k})$に対する分布汎函数をP〔$\mathbf{v}(\mathbf{k})$〕とすると，そのFourier 変換によって特性汎函数ψ〔$\mathbf{z}(\mathbf{k})$〕が定義される。

$$\psi[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \overline{exp\, i(\mathbf{z}\cdot\mathbf{v})} = \int exp\, i(\mathbf{z}\cdot\mathbf{v})\, P[\mathbf{v}(\mathbf{k})]\, d\mathbf{v}(\mathbf{k})\,.$$

$$(\mathbf{z}\cdot\mathbf{v}) = \int \mathbf{z}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{z}(-\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\,, \quad \begin{matrix}\mathbf{z}(\mathbf{k}) = \mathbf{z}^*(-\mathbf{k})\\ \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \mathbf{v}^*(-\mathbf{k})\end{matrix} \quad \left({}^*:\text{複素共役}\right)$$

ψ〔$\mathbf{z}(k)$〕の時間変化を記述する特性汎函数方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} = &-\nu\int k^2 z_\alpha(\mathbf{k}) D_\alpha(\mathbf{k})\psi\, dk\\ &+\iint \tilde{z}_\alpha(\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\, k''_\beta D_\beta(\mathbf{k}') D_\alpha(\mathbf{k}'')\psi\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{k}''\,,\end{aligned} \tag{C}$$

ここに $D_\alpha(\mathbf{k}) = \dfrac{\delta}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$ ，$\tilde{z}_\alpha(\mathbf{k}) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \dfrac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) z_\beta(\mathbf{k})$。

ψ〔$\mathbf{z}(k)$〕が特性函数であるためには次の条件

$$\begin{aligned}&|\psi[\mathbf{z}(\mathbf{k}), t]| \leqq 1\,, \quad \psi[0, t] = 1\\ &\psi^*[\mathbf{z}(\mathbf{k}), t] = \psi[-\mathbf{z}(\mathbf{k}), t]\end{aligned} \tag{D}$$

をみたす必要がある。[2〜4)]

このようなψが求まれば，それを汎函数微分することにより任意の次数の積平均値を求めることができる。

§ 3. 特性汎函数方程式の極限の場合の解

弱い乱れ及び非粘性の極限の場合には，次のような解が求められている。

(i) 弱い乱れの極限[2,3,4]

慣性項を無視した特性汎函数方程式

$$\frac{\partial \psi\,[\tilde{\mathbf{z}}]}{\partial t} + \nu \int k^2 \tilde{z}_\alpha(\mathbf{k}) \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}_\alpha(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}}\ d\mathbf{k} = 0$$

に対しては，一様正規分布の特性汎函数

$$\psi\,[\tilde{\mathbf{z}}] = exp\left\{ -\frac{1}{2}\int a_{ij}(\mathbf{k},\ -\mathbf{k})\,\tilde{z}_i(\mathbf{k})\,\tilde{z}_j(-\mathbf{k})\,exp\,[-2\nu k^2 t]\,d\mathbf{k} \right\}$$

が解になっている。

汎函数微分により，エネルギー・スペクトルは

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k},\ t) = \Phi_{ij}(\mathbf{k},\ 0)\,exp\,[-2\,\nu k^2\,t],$$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k},\ 0) = \left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2}\right)\left(\delta_{jm} - \frac{k_j k_m}{k^2}\right) a_{lm}(\mathbf{k},\ -\mathbf{k})$$

となり，積平均値理論による弱い乱れのエネルギー・スペクトルと一致する。

(ii) 非粘性の極限（$\nu = 0$）[2,3,5]

この場合には，乱れのエネルギーの粘性による消散は存在しないので，乱れが統計的平衡状態にあることが可能と考えられ，位相分布は時間的に定常，すなわち$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ とできる。このとき等方的正規分布 $\psi\,[\tilde{\mathbf{z}}] = exp\left\{-\frac{a}{2}\int |\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{k})|^2\,d\mathbf{k}\right\}$ が特性汎函数方程式の定常解になっている。エネルギー・スペクトル密度は$\Phi(k) = a$であり，波数空間でのエネルギー等分配を表わす。

§ 4. 特性汎函数方程式の近似解法

(1) 汎函数ベキ級数展開[17]

特性汎函数を次の形の汎函数ベキ級数に展開する。

$$\psi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$$

ただし，ψ_n はn次の同次ベキ汎函数，

$$\psi_n\,[\mathbf{z}(\mathbf{k}),\ t] = \int\cdots\int z_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1)\cdots z_{\alpha_n}(\mathbf{k}_n)\,\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(\mathbf{k}_1,\ \cdots,\ \mathbf{k}_n\ ;\ t)\,d\mathbf{k}_1\cdots d\mathbf{k}_n$$

である。ここで，$\psi = \overline{exp\ i\,(\mathbf{z}\cdot\mathbf{v})} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\overline{(\mathbf{z}\cdot\mathbf{v})^n}$ であることを考慮すれば，

$\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n; t) = \dfrac{i^n}{n!}\overline{v_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1, t)\cdots v_{\alpha_n}(\mathbf{k}_n, t)}$ となる。すなわち，$\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ は速度場の n 次の積平均値のＦｏｕｒｉｅｒ 変換に対応する。この展開を特性汎函数方程式に代入し，z について同次のベキの係数を等置すると積平均値 ψ に対する方程式を得，積平均値理論に帰着する。この方程式系では n 次の積平均値に対する方程式に $n+1$ 次の積平均値が現われ閉じない。展開の無限項をとれば厳密であるが実際に取り扱うことは困難である。有限項では特性函数の性質（Ｄ）をみたさない。（注　$\psi\,[\mathbf{z}(\mathbf{k}),\ t]$ に対する§4.の解法は $\Phi\,[\mathbf{y}(\mathbf{x}),\ t]$ に対しても同様に適用できる。）

(2)　キュムラント展開[17)]

対数特性汎函数をベキ級数に展開する。すなわち，

$$\ln\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n,$$

$$\psi_n\,[\mathbf{z}(\mathbf{k}),\ t] = \int\cdots\int z_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1)\cdots z_{\alpha_n}(\mathbf{k}_n)\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n; t)\,d\mathbf{k}_1, \cdots d\mathbf{k}_n,$$

このとき，$\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n; t)$ は n 次のキュムラントに対応する。この展開により得られる φ に対する方程式系はキュムラント方程式系である。有限項までで特性函数の性質を満たし得ない事情は(1)の場合と同様である。

(3)　汎函数Ｇｒａｍ－Ｃｈａｒｉｅｒ　展開[17)]

確率分布函数に対するＧｒａｍ－Ｃｈａｒｉｅｒ　級数展開とのアナロジーにより，$\psi = e^{\psi_1+\psi_2}\left(1+\sum_{n=3}^{\infty}\psi_n\right)$ の形の展開が考えられる。ここで ψ_n は(1)，(2)の場合と同様な n 次の同次ベキ汎函数である。これは正規函数の微分による展開である。正規分布の場合には ψ_3 以下は０であり，$\sum_{n=3}^{\infty}\psi_n$ は正規分布からのズレを表わす部分と考えられる。現象が正規に近い場合には有効であると思われる。

(4)　Ｒｅｙｎｏｌｄｓ 数展開

特性汎函数方程式を無次元化すると，２次の汎函数微分を含む項の係数にＲｅｙｎｏｌｄｓ 数 Re が現われる。

$\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n$（$\psi_n$ は Re に関して n 次の項）と展開し，方程式に代入すると，Re について n

次の汎函数ψ_nに対する方程式には，Reについて$n-1$次の汎函数ψ_{n-1}が現われる。したがって，原理的にはψ_0，すなわち，§3.の弱い乱れの極限の場合の解，から順次解くことができる。この解法については，外力を導入した定常乱流に対するMonin の仕事[6]がある。

(5) 独立変数展開

解法(1)，(2)，(3)は従属変数であるψを独立変数zのベキに展開する方法であるが，独立変数$\mathbf{z}(\mathbf{k})$自身を直交函数で展開する解法も試みられている。直交函数系としてHermite 多項式を取る解法（桑原）[7]がある。

(6) Edwards の解法

Edwards[8]は次のような仮定を用いて，外力のもとでの定常乱流に対する特性汎函数方程式の近似解を得た。

① 乱流拡散・乱流粘性という概念を導入し，ψに対する方程式の各項の大きさを，あるパラメター に関して0，1，2次であると仮定する。

② ψをこのパラメターのベキの級数$\psi=\psi_0+\psi_1+\cdots\cdots$に展開する。

③ 速度場の２次モーメントが第０近似ψ_0から完全に決定できる。したがって$\psi_1+\psi_2+\cdots\cdots$は２次モーメントに寄与しない。

④ ψ_nをψ_0に関するHermite 多項式に展開して解く。これらの仮定の妥当性および，このような展開の低次の項のみをとることによる近似の良さについては，まだ明らかにされていない。

Edwards が取り扱った近似の範囲内ではKolmogorovのスペクトルは得られなかった。

第２の仕事[9]においてEdwards は，２次の平均値を支配する方程式とBoltzman 方程式との類似性を論じ，乱流ではcollision time が連続であるから，ある時刻tでの乱れの場$v(k)$に関する確率密度よりも，全歴史$v(k, t)$に関する確率密度が重要になることを指摘している。

Edwards の方法とは異なる摂動の取り扱いとして，Herring[10]による自己無矛盾場の方法がある。これは，あるmode に対する他のmode の影響が外力の形になるような近似法である。

(7) Wiener－Hermite 展開[11]

確率過程（乱れの場 $\mathbf{v}(\mathbf{k},\ t)$）自身をWiener－Hermite汎函数で展開し，展開係数に対する方程式を取り扱う。正規に近い過程に対し有効であると考えられている。

(8) Wyld の摂動展開[12,13]

外力のある定常乱流において，非線型項が無いときの解のベキによる摂動展開を行い，その摂動を系統的に構成する際に，量子力学で用いられるFeynman ダイヤグラムの方法を用いている。その結果は3個の函数に対する3個の無限級数連立積分方程式になり，項を適当に無視することによりKraichnan[14] の直接相互作用方程式に帰着する。

(9) 汎函数積分による解法

Reynolds 数によらない閉じた形の一般解を得るためには汎函数積分を実行する必要がある。Rosen[15] およびTatarski[1] により試みられている。Rosenはpropagation kernel の形の解の積分表示をFeynman のpath integralの方法[16]により得た。Tatarskiは量子場理論における摂動のテクニックを応用し，特性汎函数方程式の解の汎函数Fourier 積分表示を得た。これらの仕事は汎函数積分を1回実行し形式解を得たという点で同等である。残された汎函数積分が実行できれば意味のある結果が得られるのであるが，この積分の実行は今のところは不可能である。Tatarski の仕事については次節で報告する。

§5. Tatarski の仕事

Navier－Stokes方程式と連続の方程式のFourier 変換

$$\frac{\partial v_i(\mathbf{k},t)}{\partial t} = Q_i\,[\mathbf{v}(\mathbf{k},t);\mathbf{k}] - \nu k^2 v_i(\mathbf{k},t)$$

$$k_i v_i(\mathbf{k},t) = 0, \qquad (1)$$

を考える。ここに$Q_i\,[v(\mathbf{k},t);\mathbf{k}] = B_{l,\,ij}(\mathbf{k})\int v_l(\mathbf{k},t)v_j(\mathbf{k}-\mathbf{k},t)\,d^3k$

$$B_{l,\,ij}(\mathbf{k}) = -ik_l(\delta_{ij} - k_ik_j/k^2).$$

連続の式$k_iv_i(\mathbf{k},t)=0$を用いると速度場成分は2成分に減る。しかし解が複雑になるので，3成

分は独立であるとし，連続の条件 $k_i v_i = 0$ は初期状態にだけ課す。（初期に $k_i v_i = 0$ であれば，すべての t に対してみたされることは(1)式に k_i をスカラー積することにより $\frac{\partial}{\partial t}(k_i v_i) = -\nu k^2 (k_i v_i)$ を得，したがって，$k_i v_i(\mathbf{k}, 0) = 0$ ならば $k_i v_i(\mathbf{k}, t) = 0$。）

次の形の新しい函数 $g_i(k, t) = 0$ を導入する

$$v_i(\mathbf{k}, t) = exp(-\nu k^2 t) g_i(\mathbf{k}, t), \quad g_i^*(-\mathbf{k}, t) = g_i(\mathbf{k}, t)。 \tag{2}$$

このとき(1)式は変形されて

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial g_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = exp(\nu k^2 t) Q_i \left[exp(-\nu k^2 t) g(\mathbf{k}, t); \mathbf{k} \right] \\ &\text{初期条件} \\ &\qquad g_i(\mathbf{k}, 0) = v_i^0(\mathbf{k}), \quad k_i v_i^0(\mathbf{k}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$v_i^0(\mathbf{k})$ をrandom field としたとき，初期特性汎函数を次のように定義する，

$$\Phi_0 \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \right] = \left< Z \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{v}^0(\mathbf{k}) \right] \right>_{v^0} , \tag{4}$$

ただし，$Z \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{v}^0(\mathbf{k}) \right] = exp \left\{ 2\pi i \int z_j(\mathbf{k}) v_j^0(\mathbf{k}) d^3 k \right\}$，

$$z_i^*(-\mathbf{k}) = z_i(\mathbf{k}) .$$

(2)，(3)式のrandomな初期条件に対する解 $v_i(k, t)$ もまたrandom field であり，その特性汎函数も同様に定義できる。

$$\Phi_t \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \right] = \left< Z \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{v}(\mathbf{k}, t) \right] \right>_{\mathbf{v}^0} , \tag{5}$$

$$\Psi_t \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \right] = \left< Z \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}); \mathbf{g}(\mathbf{k}, t) \right] \right>_{\mathbf{v}^0} , \tag{6}$$

ここで $\Phi_t \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \right] = \Psi_t \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) exp(-\nu k^2 t) \right]$。

(5)，(6)の平均 $\left< \quad \right>_{\mathbf{v}^0}$ は $\mathbf{v}(\mathbf{k}, t)$，$\mathbf{g}(\mathbf{k}, t)$ が $\mathbf{v}^0(\mathbf{k})$ で表わされ，それについて平均をとるという意味である。

(6)を時間微分し，(3)を代入し，平均と k に関する積分とを交換し，時間に依存する作用素および函数

$$\left.\begin{aligned} &D_i(\mathbf{k}, t) = exp(-\nu k^2 t) D_i(\mathbf{k}), \ D_i(\mathbf{k}) = \delta / \delta z_i(\mathbf{k}) \\ &z_i(\mathbf{k}, t) = exp(\nu k^2 t) z_i(\mathbf{k}) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

を導入すると

$$\left.\begin{aligned} &2\pi i \frac{\partial \Psi_t}{\partial t} = \int d^3 k \, z_i(\mathbf{k}, t) Q_i \left[\mathbf{D}(\mathbf{k}, t); \mathbf{k} \right] \Psi_t \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \right] \\ &\text{初期条件} \quad \Psi_0 \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \right] = \Phi_0 \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \right] \\ &\quad k_i D_i(\mathbf{k}) \Phi_0 \left[\mathbf{z}(\mathbf{k}) \right] = 0 \ (\leftarrow k_i v_i^0(\mathbf{k}) = 0) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(8)式は $2\pi i\dfrac{\partial \psi_t}{\partial t}=H(t)\psi_t$

$$\left.\begin{aligned}&2\pi i\frac{\partial \psi_t}{\partial t}=H(t)\psi_t\\ &H(t)=\int d^3k_1\int d^3k_2 B_{l,ij}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)z_i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,t)D_l(\mathbf{k}_1,t)D_j(\mathbf{k}_2,t)\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

と書くことができる。このとき(9)式は相互作用表示のベクトル・ボーズ場に対するSchrödinger方程式と対応させることができる。量子場理論の言葉では，$z_i(\mathbf{k})$，$D_i(\mathbf{k})$はそれぞれ運動量kをもつボーズ粒子の生成・消滅作用素。$H(t)$およびψ_tは相互作用表示のハミルトニアンおよび状態ベクトルに対応する。またポアソン括弧を$[A,B]\equiv AB-BA$とすると交換関係

$$\left.\begin{aligned}&[D_i(\mathbf{k}),z_j(\mathbf{k}')]=\delta_{ij}\delta(k-k')\\ &[D_i(\mathbf{k},t),z_j(\mathbf{k}',t')]=exp[-\nu k^2(t-t')]\,\delta_{ij}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

が成立する。以上のように場の理論との形式的な対応はあるが，乱流の場合にはハミルトニアンに対称性がないこと，2個のボーズ粒子の融合の過程のみを記述するという点では場の理論と異なる。

我々の目的は(9)式の形式解を求めることであるが，その前に特別な初期条件に対する(9)式の厳密解に触れる。

iterationにより(9)式の一般解は

$$\begin{aligned}\psi_t[\mathbf{z}(\mathbf{k})]&=S(t)\Phi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})]\\ &=\left\{1+\cdots+\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1}d\tau_2\cdots\int_0^{\tau_{m-1}}d\tau_m H(\tau_1)\cdots H(\tau_m)+\cdots\right\}\\ &\qquad\Phi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})]\end{aligned}\quad(11)$$

と表わせる。いま初期の特性汎函数としてn次の汎函数

$$\begin{aligned}\Phi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})]&=\theta_n[\mathbf{z}(\mathbf{k})]\\ &=\int\cdots\int f_{i_1\cdots i_n}(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_n)\,z_{i_1}(\mathbf{k}_1)\cdots z_{i_n}(\mathbf{k}_n)\,d^3k_1\cdots d^3k_n\end{aligned}\quad(12)$$

をとる。$H(t)$をθ_nに作用させるとその次数を1さげることに注意すれば，(11)の$S(t)$において$n+1$次以下のすべての項はθ_nに作用させると0になることがわかる。したがって，初期条件が(12)のときには，(11)式のn項までが厳密解を表わすことになる。ところが，θ_nは特性函数であるための条件$|\Phi_0|\leq 1$をみたさない。また，このようなθ_nの異なるnの一次結合もこの性質を持たない。Φ_0は無限ベキ級数にのみ展開可能で，実際には無限項を扱うことはできない。

(9)式の解をcontinual integralによって表示したい。そのために次の作用素を導入する。

$$S(t)=T(K)=T\ exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_0^t H(\tau)d\tau\right] \tag{13}$$

Tはchronological operatorと呼ばれ，(13)式のexpを展開したとき，もっとも最近の時刻に関する$H(\tau)$の項が左にくるように$H(\tau)$を整列するoperatorである。すなわち，(13)のexpを展開したとき(11)になるようにするoperatorである。(13)はnormal formと呼ばれる(14)の形に変換できる。operatorのnormal formとは，すべての生成operator $z_i(\mathbf{k},t)$が左に，消滅operator $D_i(\mathbf{k},t)$が右にくるような形を言う。

$$S(t)=N\left\{(exp\triangle)\cdot K\right\} \tag{14}$$

$$\triangle=\int d^3k\int_0^t d\tau_2\int_0^{\tau_2}d\tau_1\ exp\left[-\nu k^2(\tau_2-\tau_1)\right]\frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k},\tau_1)}\ \frac{\delta}{\delta D_i(\mathbf{k},\tau_2)} \tag{15}$$

(4)式のΦ_0にoperator(14)を作用させSを平均記号の中に入れると

$$\psi_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k})\right]=\left\langle N\left\{(exp\triangle)\cdot K\right\}\cdot Z\left[\mathbf{z}(\mathbf{k});\mathbf{v}^0(\mathbf{k})\right]\right\rangle_{\mathbf{v}^0} \tag{16}$$

(14)式では，operator $D_i(\mathbf{k},t)$はすべて$z_i(\mathbf{k},t)$の右側にあるのでZのみに作用し，次の規則によって個有値と置き換えられる。

$$\left.\begin{array}{l} D_i(\mathbf{k},t)\rightarrow 2\pi i\,\tilde{v}_i(\mathbf{k},t),\quad \tilde{v}_i(\mathbf{k},t)=exp\left[-\nu k^2t\right]v_i^0(\mathbf{k}) \\ \dfrac{\delta}{\delta D_i(\mathbf{k},t)}\rightarrow\dfrac{1}{2\pi i}\ \dfrac{\delta}{\delta\tilde{v}_i(\mathbf{k},t)} \end{array}\right\} \tag{17}$$

(17)のような置き換えを実行したものに～をつけて表わすと，

$$H\rightarrow\tilde{H},\ \tilde{H}\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},t);\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},t)\right]=-4\pi^2\int d^3k\,z_i(\mathbf{k},t)Q_i\left[\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},t);\mathbf{k}\right],$$

$$\triangle\rightarrow\tilde{\triangle},\ \tilde{\triangle}=\frac{1}{2\pi i}\int d^3k\int_0^t d\tau_2\int_0^{\tau_2}d\tau_1\,exp\left[-\nu k^2(\tau_2-\tau_1)\right]\frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k},\tau_1)}\ \frac{\delta}{\delta\tilde{v}_i(\mathbf{k},\tau_2)}$$

$$\tilde{K}_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau);\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\tau)\right]=exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_0^t\tilde{H}\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},t');\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},t')\right]dt'\right\}$$

と置けば，

$$\begin{aligned}\psi_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k})\right]&=\left\langle\left\{(exp\tilde{\triangle})\tilde{K}_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau);\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\tau)\right]\right\}Z\left[\mathbf{z}(\mathbf{k});\mathbf{v}^0(\mathbf{k})\right]\right\rangle_{\mathbf{v}^0}\\ &=\left\langle\tilde{S}_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau);\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\tau)\right]Z\left[\mathbf{z}(\mathbf{k});\mathbf{v}^0(\mathbf{k})\right]\right\rangle_{\mathbf{v}^0}\end{aligned} \tag{18}$$

$\tilde{\triangle}$を作用できるような形に$\tilde{K}_t$を書き表わす。そのためには$\tilde{K}_t$を$\tilde{v}_i(\mathbf{k},\tau)$のcontinual integralで表わす。continual integralの定義は次のようになされる。

汎函数$F\left[f(x)\right]$，$(a\leq x\leq b)$のcontinual integralは

$$\int F\left[f(\xi)\right]\mathcal{D}f(\xi)=\lim_{n\rightarrow\infty}\int\cdots\int F(f_1,\cdots,f_n)(\sqrt{\triangle x}\ df_1)\cdots(\sqrt{\triangle x}\ df_n) \tag{19}$$

と定義する。ただし，$\triangle x=(b-a)/n$，$Df(\xi)=\prod_{\xi} d\xi\sqrt{df(\xi)}$，$F(f_1, \cdots, f_n)$ は $F[f(\xi)]$ の，値 $f_1, \cdots, f_n$ をとる階段函数上での値とする。また δー汎函数が次のように定義される。

$$\delta_\infty[\varphi(\xi)]=\int exp[2\pi i\int f(\xi)\varphi(\xi)d\xi]\mathscr{D}f(\xi) \tag{20}$$

$$\int F[\varphi(\xi)]\ \delta_\infty[\varphi(\xi)-f(\xi)]\mathscr{D}\varphi(\xi)=F[f(\xi)] \tag{21}$$

(20), (21)式より

$$F[f(\xi)]=\int\mathscr{D}\varphi(\xi)\int D\psi(\xi)F[\varphi(\xi)]\,exp\left\{2\pi i\int\psi(\xi)[\varphi(\xi)-f(\xi)]d\xi\right\} \tag{22}$$

以上の定義で，3つの拡張をする。①$a\to-\infty$，$b\to+\infty$ ②f，φ，ψ(real function) の Fourier 変換によりf，φ，ψ(complex function) に拡張。このとき(22)式の exp 内の $\int\psi(\xi)[\varphi(\xi)-f(\xi)]d\xi$ は realに保つ。③多変数への拡張，$Df(\mathbf{k},\tau)=\prod_{\mathbf{k},\tau}\sqrt{d^3kd\tau}\ df(\mathbf{k},\tau)$。

このような拡張により$\widetilde{K}_t$ は $\widetilde{v}_i(\mathbf{k},\tau)$ の continual integral の形で表わせる。

$$\begin{aligned}&\widetilde{K}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau);\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\tau)]\\&=\int\mathscr{D}^3a(\mathbf{k},\tau)\int\mathscr{D}^3A(\mathbf{k},\tau)\widetilde{K}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau);\mathbf{a}(\mathbf{k},\tau)]\\&\quad\times exp\left\{2\pi i\int d^3k\int_0^t d\tau Ai(\mathbf{k},\tau)[\widetilde{v}_i(\mathbf{k},\tau)-a_i(\mathbf{k},\tau)]\right\}\end{aligned} \tag{23}$$

ここに，$\mathbf{a}^*(-\mathbf{k},\tau)=\mathbf{a}(\mathbf{k},\tau)$，$\mathbf{A}^*(-\mathbf{k},\tau)=\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau)$

(23)式においては，z_i，v_i は exp に1次で入っている。したがって作用素$\widetilde{\triangle}$の$\widetilde{K}_t$ への作用は容易に計算できて，(23)の積分に次式がかかる。

$$\widetilde{\triangle}\to\frac{1}{2\pi i}\int_0^t\widetilde{H}[\mathbf{L}[\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau);t'];\mathbf{a}(\mathbf{k},t')]\,dt',$$

$$L_i[\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau);t']=\int_{t'}^t exp[-\nu k^2(\tau-t')]\,A_i(\mathbf{k},\tau)d\tau$$

$\widetilde{\triangle}$を作用して出てくる因子は z_i，v_i によらないので$\widetilde{\triangle}$を何回作用させても同じで，結局

$$\begin{aligned}exp\widetilde{\triangle}&\to exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_0^t\widetilde{H}[\mathbf{L}[\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau);t'];\mathbf{a}(\mathbf{k},t')]\,dt'\right\}\\&=\widetilde{K}_t[\mathbf{L}[\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau');\tau];\mathbf{a}(\mathbf{k},\tau)]\end{aligned} \tag{24}$$

(24)を代入して

$$\widetilde{S}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau);\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\tau)]$$

$$=\int\mathscr{D}^3a(\mathbf{k},\tau)\int\mathscr{D}^3A(\mathbf{k},\tau)\widetilde{K}_t[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau)+\mathbf{L}[\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau');\tau];\mathbf{a}(\mathbf{k},\tau)]$$

$$\times exp\left\{2\pi i\int d^3k\int_0^t d\tau A_i(\mathbf{k},\tau)\left[\widetilde{v}_i(\mathbf{k},\tau)-a_i(\mathbf{k},\tau)\right]\right\} \tag{25}$$

(25)式は$\mathbf{a}(\mathbf{k},\tau)$に関して，Feynmanの方法で積分できる。(25)式で$\mathbf{a}(\mathbf{k},\tau)$に関する積分の部分を取り出してそれを$G_t$とすると

$$G_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau);\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau)\right]=\int\mathcal{D}^3a(\mathbf{k},\tau)\widetilde{K}_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau)+\mathbf{L}\left[\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau'),\tau\right];\right.$$
$$\left.\mathbf{a}(\mathbf{k},\tau)\right]\times exp\left\{-2\pi i\int d^3k\int_0^t d\tau A_i(\mathbf{k},\tau)a_i(\mathbf{k},\tau)\right\} \tag{26}$$

(26)の被積分函数は$a_i(\mathbf{k},\tau)$に関して2次（$\widetilde{K}_t$の部分）と1次を含む指数函数である。$a_i(\mathbf{k},\tau)=a_i^0(\mathbf{k},\tau)+u_i(\mathbf{k},\tau)$，および$\mathcal{D}^3a(\mathbf{k},\tau)=D^3u(\mathbf{k},\tau)$によって積分変数$u_i(\mathbf{k},\tau)$を導入し，指数函数が$u_i(\mathbf{k},\tau)$に関して1次の項を含まないように$a_i^0(\mathbf{k},\tau)$を選ぶとconvolution typeの線型積分方程式になり，Fourier変換により解くことができる。（この計算は$\int exp\left[iF(\mathbf{a})\right]d\mathbf{a}$，（$\mathbf{a}$：函数）の形の汎函数積分が，$F(\mathbf{a})$が$\mathbf{a}$に関して2次のときに実行できて$f\,exp\left[iF_0(\mathbf{a})\right]$，（ただし$f$は規格化定数，$F_0(\mathbf{a})$は汎函数$F(\mathbf{a})$の停留値）に等しくなることを利用する。）

$\mathbf{a}(\mathbf{k},\tau)$に関して積分すると(26)式は

$$G_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau);\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau)\right]=M\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau)+\mathbf{L}\left[\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau');\tau\right];\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau)\right] \tag{27}$$

ここに，

$$M\left[\mathbf{f}(\mathbf{k},\tau);\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau)\right]=Q_0 exp\left\{-\frac{\delta_4(0)}{2}\int d^3x\int_0^t dt'\,lnT\left[\mathbf{f}(\mathbf{x},t');\mathbf{x}\right]\right.$$
$$-i\pi\int d^3k_1\int d^3k_2\int_0^t dt'\,I_{ij}\left[\mathbf{f}(\mathbf{k},t'),\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\right]A_i(\mathbf{k}_1,t')$$
$$\left.A_j(\mathbf{k}_2,t')\right\},$$

$$I_{ij}\left[\mathbf{f}(\mathbf{k},t');\mathbf{k}\right]=\frac{1}{16\pi^3}\int(exp\,i\mathbf{kx})\frac{\partial\,lnT\left[\mathbf{f}(\mathbf{k},t');\mathbf{x}\right]}{\partial T_{ij}\left[\mathbf{f}(\mathbf{k},t');\mathbf{x}\right]}d^3x,$$

$$T=Det\,\|T_{ij}\|,\quad T_{ij}\left[\mathbf{f}(\mathbf{k},t');\mathbf{x}\right]=\int(exp\,i\mathbf{kx})\Gamma_{ij}\left[\mathbf{f}(\mathbf{k},t')\right]d^3k,$$

$$\Gamma_{ij}\left[\mathbf{f}(\mathbf{k},t')\right]=\frac{1}{2}\left[B_{i,jl}(\mathbf{k})+B_{j,il}(\mathbf{k})\right]f_l(\mathbf{k},t').$$

以上の表示により

$$\Psi_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k})\right]=\left\langle G_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k},\tau);\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau)\right]\cdot exp\left\{2\pi i\int d^3k\left[z_i(\mathbf{k})v_i^0(\mathbf{k})\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\int_0^t d\tau A_i(\mathbf{k},\tau)exp(-\nu k^2\tau)v_i^0(\mathbf{k})\right]\right\}\mathcal{D}^3A(\mathbf{k},\tau)\right\rangle_{\mathbf{v}^0} \tag{28}$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{k})\rightarrow exp(-\nu k^2t)\mathbf{z}(\mathbf{k}),\ \Psi_t\rightarrow\Phi_t,\ \mathbf{z}(\mathbf{k},\tau)=exp(\nu k^2\tau)\mathbf{z}(\mathbf{k})$$

によってΦ_tに戻すと，

$$\Phi_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k})\right]=\left\langle\int G_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k})exp\left[-\nu k^2(t-\tau)\right];\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau)\right]\right.$$
$$\times exp\left\{2\pi i\int d^3k\, v_i^0(\mathbf{k})\left[z_i(\mathbf{k})exp(-\nu k^2t)+\int_0^t exp(-\nu k^2t)A_i(\mathbf{k},\tau)d\tau\right]\right\}$$
$$\left.\mathcal{D}^3A(\mathbf{k},\tau)\right\rangle_{\mathbf{v}^0} \tag{29}$$

Φ_0 の定義を用い，(29)式で$v_i^0(\mathbf{k})$に関する平均を実行すると，

$$\Phi_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k})\right]=\int G_t\left[\mathbf{z}(\mathbf{k})exp\left[-\nu k^2(t-\tau)\right];\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau)\right]$$
$$\times\Phi_0\left[\mathbf{z}(\mathbf{k})exp(-\nu k^2t)+\mathbf{L}\left[\mathbf{A}(\mathbf{k},\tau);0\right]\right]\mathcal{D}^3A(\mathbf{k},\tau) \tag{30}$$

(30)式が，Ｔａｔａｒｓｋｉ による最終的な積分表示であり，物理的な結果を得るためには$A_i(\mathbf{k},\tau)$ に関する積分を実行する必要があるが，これは難問である。(30)式に関連してＴａｔａｒｓｋｉ が次のような議論をしていることを紹介してこの稿を閉じる。

いま初期特性汎函数としてＧａｕｓｓｉａｎ の場合，すなわち，

$$\Phi_0\left[\mathbf{z}(\mathbf{k})\right]=exp\left\{-\frac{1}{2}\int W_{ij}(\mathbf{k})z_i(\mathbf{k})z_j(-\mathbf{k})d^3k\right\}$$

を考える。$W_{ij}(\mathbf{k})$ は初期におけるエネルギー・スペクトル密度で，$t=0$での代表的速度および長さをV_0，L_0 とすると，$V_0^2L_0^3$ に比例する。したがって$V_0L_0\to\infty$（$R_0\to\infty$）のときには汎函数Φ_0 は$\mathbf{z}=0$の近傍でのみ値を持つ。つまり$\mathbf{z}=0$でのδ－汎函数になる。したがってΦ_t の変化はΦ_0 よりもむしろG_t に依存する。以上はΦ_0 がＧａｕｓｓｉａｎ の場合であるが，一般にＧａｕｓｓｉａｎ以外のΦ_0 に対しても，$Re\to\infty$ のときには，δ－汎函数的になるであろうから，初期に$Re\to\infty$のときには乱流のｄｅｇｅｎｅｒａｔｉｏｎ を支配する法則は初期の確率分布の形に依存しないであろうというのがＴａｔａｒｓｋｉ の結論である。

文　　　　献

1) V.I. Tatarski : Soviet Phys. – JETP **15** (1962) 961.

2) 巽　友正 : "乱流" 槇書店 (1962) 140.

3) 池田紀人 : 数理研講究録 **23** (1967) 1.

4) E. Hopf : J. Rat. Mech. Anal. **1** (1952) 87.

5) E. Hopf and E. W. Titt : J. Rat. Mech. Anal, **2** (1953) 587.

6) A. S. Monin : J. Appl. Math. and Mech. **28** (1964) 389.

7) 桑原真二 : 数理研講究録 **23** (1967) 39, **47** (1968) 30.

8) S. F. Edwards : J. Fluid Mech. **18** (1964) 239.

9) S. F. Edwards : Intern. Conf. Plasma Physics, Trieste, (1965) 595.

10) J. R. Herring : Phys. Fluids, **8** (1965) 2219, **9** (1966) 2106.

11) T. Imamura, W. Meecham and A. Siegel : J. Math. Phys., **6** (1965) 595，他．

12) H. Wyld : Ann. Phys., **14** (1961) 143.

13) A. V. Shut'ko : Soviet Phys. Doklady, **9** (1965) 857.

14) R. Kraichnan : J. Fluid Mech., **5** (1959) 497.

15) G. Rosen : Phys. Fluids, **3** (1960) 519, **3** (1960) 525.

16) R. P. Feynman : Phys. Rev. **84** (1951) 108.

17) A. S. Monin and A. M. Yaglom : 'Statistical Hydrodynamics' vol. **2** (1967) Chapter 10.

18) M. J. Beran : Monographs in statistical physics, vol 9. 'Statistical Continuum Theory', Interscience, (1968) Chapter 10, Turbulence.